



TEXTO PARA DISCUSSÃO

ISSN 0103-9466

400

**Ajustes de leis de potência e outras distribuições de
caudas pesadas para séries de câmbio: uma
aplicação do método Clauset, Shalizi e Newman**

**Gustavo de O. Aggio
Bruno De Conti**

Dezembro 2020



ie Instituto de
economia

Ajustes de leis de potência e outras distribuições de caudas pesadas para séries de câmbio: Uma aplicação do método Clauset, Shalizi e Newman

Adjustments of power law and others fat tailed distributions to exchange series: An application of Clauset, Shalizi and Newman methodology

Gustavo de O. Aggio*
Bruno De Conti†

Resumo

Quando tratamos de taxas de câmbio observamos grande volatilidade espalhada de forma não uniforme nas séries temporais. Uma das formas de modelar este comportamento é através de técnicas que empregam autorregressores e heterogeneidade do erro aleatório, os modelos da família GARCH. Outra abordagem consiste em estudar a distribuição dos valores extremos das séries. Considerando que existe uma longa tradição de associar leis de potência a séries econômicas, desde Pareto na distribuição de renda até estudos de séries financeiras realizados mais recentemente, decidimos investigar a possibilidade de existência de leis de potência e outras distribuições de caudas pesadas nos extremos de um conjunto de séries para taxa de câmbio no período de julho de 2005 a junho de 2019. Para fazer as estimativas nós empregamos o método proposto por Clauset, Shalizi e Newman (2009) para ajustar, testar e comparar distribuições com leis de potência, lognormal e exponencial em séries de retorno de dez taxas de câmbio em relação ao dólar americano. Este método vem sendo aplicado em diversas áreas e se mostrou apropriado para o estudo em questão. Este método elimina a subjetividade no ajuste que era a característica das técnicas inicialmente utilizadas, outra vantagem é que o método pode ser empregado com pacote na linguagem *R* de fácil implementação. Nossos resultados indicam que a maior parte das caudas possui extremos que podem ser classificados como uma lei de potência com um grau moderado de confiança. Esses resultados poderão ser empregados na análise de valores extremos e para classificação de risco dos ativos. Além disso, podem ser aceitos como fato estilizado em áreas como finanças, economia internacional, macroeconomia aberta e teoria cambial. Em busca de um conjunto maior de explicações para o nosso objeto de estudo nós também empregamos técnicas descritivas e alguma análise histórico institucional sobre as séries.

Palavras chave: lei de potência, taxa de câmbio, finanças, valores extremos.

JEL codes: C58, C1, F31.

*Instituto de Economia da UNICAMP, aggio@unicamp.br.

†Instituto de Economia da UNICAMP, deconti@unicamp.br.

When we work with exchange rates we observe high volatility distributed in a non uniform way in the time series. A set of procedures intended to model this kind of behavior are the techniques that employ auto-regressive models with heterogeneity of the random errors, the so called GARCH models. Other possibility consists in explore the distributions of the extreme values in the series. Taking that there is a long tradition in relate power laws to economic series, since Pareto in income distributions, until a more recent literature in financial series, we decided investigate the possibility of the existence of power law and also others fat tailed distributions at the extremes in a set of exchange rates collected in a period from July 2005 until June 2019. In order to do these estimates we employ the methodology proposed by Clauset, Shalizi and Newman (2009) to adjust, test, and compare power law, log-normal and exponential distributions in the returns series of ten exchange rates in relation with US dollar. This methodology has been applied em several research areas and proved to be appropriated to our study. This methodology eliminate subjective aspects that was a characteristic of pioneering techniques. Other advantage is that this methodology can be employed with a package in R of easy implementation. Our results indicates that in the larger part of the tails there are extreme values that can be classified as a power law in a procedure with moderated degree of confidence. These results can be employed in the analysis of extreme value and also in the risk classification of financial assets. In addition to this, these results can be accepted as a stylized fact in research ares like finance, international economics, open macroeconomics, and the theory of exchange rates. In the search of a larger set of explanations to our object we also employed descriptive techniques and some historic and institutional analysis about the series. Key words: power law, exchange rates, finance, extreme values.

1 Introdução

O estudo de caudas pesadas nas distribuições de séries econômicas e financeiras é extenso e bem difundido. Especificamente, a presença de caudas pesadas indica que eventos consideravelmente distantes da média podem ser explicados pela distribuição de probabilidades associada à série. Ou ainda, que eventos extremos que tenderiam a ser qualificados como *outliers* em uma análise inicial, na verdade, são mais prováveis do que se esperaria se a série correspondesse a um passeio aleatório gaussiano, a hipótese que ainda hoje fundamente grande parte da teoria econômica-financeira. Mandelbrot (1963) e Fama (1963) foram pioneiros na associação de processos de Lévy, também conhecidos como Paretianas estáveis, a séries financeiras em contraposição com a hipótese gaussiana.

Como bem se sabe, um processo de Lévy não gaussiano é caracterizado por variância infinita,¹ o que se contrapõem às observações empíricas. Isto levou à consideração de soluções híbridas como os *voos truncados de Lévy* (Mantegna e Stanley, 1994), por exemplo. Entretanto, a consideração de distribuições em lei de potência com variância finita geraram todo um conjunto de evidências bem estabelecidas em finanças e econofísica como, por exemplo, a *Lei Cúbica* na distribuição das flutuações dos preços de ações. Para uma abordagem didática sobre a lei cúbica ver Gabaix (2008, p.35). Além disso, Gabaix (2008) é altamente recomendado para especificações, explicações teóricas, evidências empíricas e estimação de leis de potência em economia e finanças.

Também com relação às taxas de câmbio, um conjunto de estudos foi realizado para a verificação de lei de potência. Ver referências não exaustivas em Wei e Billings (2009), por exemplo. As ten-

¹Ver detalhes em Mantegna e Stanley (2000, cap. 4), por exemplo.

tativas de ajuste podem ser realizadas sobre a série de variações absolutas dos preços ou sobre o retorno, ou mesmo por uma normalização destas séries. Dadas as diferentes possibilidades, os diferentes resultados obtidos podem implicar em interpretações distintas e de difícil comparação. Destarte a importância de uma explicitação teórica sobre as origens ou causas de uma lei de potência e, portanto, sobre qual transformação da série se deve analisar, consideramos como um fato bem estabelecido que a série de retornos da uma taxa de câmbio configura uma informação central na economia contemporânea e que a sua análise e a análise dos seus valores extremos é por si só fonte de interesse para pesquisas relacionadas à economia internacional, macroeconomia aberta e finanças em geral, por exemplo.

Além disto, como será apresentado a seguir, Clauset, Shalizi e Newman (2009) organizaram um conjunto de procedimentos (doravante método CSN) que permitem não apenas ajustar uma lei de potência a uma série de valores sem a necessidade de nenhum procedimento subjetivo, como também permitem testar a plausibilidade do ajuste e, por fim, comparar com outras possibilidades em termos de funções de probabilidades, especialmente aquelas também caracterizadas por caudas pesadas. Particularmente relevante ao nosso interesse, o método CSN pode ser aplicado com precisão a valores extremos das séries e fornecer elementos para a classificação desse ajuste.

Neste artigo investigamos dez séries de câmbio em relação ao dólar americano e em um mesmo corte temporal para permitir a comparação de resultados. Como a distribuição é definida apenas para valores positivos e existem motivos teóricos e evidências para supor a assimetria da distribuição das séries de retornos das taxas de câmbio - ou seja, o movimento de apreciação é suficientemente diferente do movimento de depreciação cambial - nos realizamos ajustes para as duas caudas (positiva e negativa) das distribuições separadamente. Das 20 caudas analisadas nada menos do que 17 apresentaram extremos cujo ajuste de lei de potência é estatisticamente significativo pelo critério de Clauset, Shalizi e Newman (2009). Nestas séries observamos que de 6,0% a 14,7% dos dados mais extremos podem obedecer a uma lei de potência, o que se torna relevante para o estudos de valores extremos e para classificação de risco de ativos cambiais. Além desta discussão, este texto é composto de mais 4 seções onde, respectivamente, apresentamos o método CSN, a descrição estatística e alguns fatos histórico institucionais sobre as séries analisadas, os resultados dos ajustes e uma discussão sobre a desigualdade na distribuição dos valores extremos. Por fim, as considerações finais.

2 O Método CSN

Clauset, Shalizi e Newman (2009) reuniram um conjunto de procedimentos para contornar dois problemas associados ao ajuste de uma distribuição de lei de potência a séries empíricas. Neste artigo utilizamos o pacote *powerLaw* disponível para o *R*, especialmente desenvolvido para a implementação dos procedimentos previstos no método CSN. Para detalhes desta implementação não apresentados aqui remetemos a Gillespie (2015, 2019). Faremos agora uma sucinta apresentação do método CSN. Seguindo os autores (Clauset, Shalizi e Newman, 2009, pp. 663-672),² seja, para o caso contínuo, a função de probabilidade definida na forma

$$p(x)dx = Pr(x \leq X < x + dx) = Cx^{-\alpha}dx, \quad (1)$$

²Com alguma modificação apenas para tornar a apresentação mais didática.

temos que a função não pode ser definida para $x = 0$ e diverge para valores próximo a este. Portanto, um primeiro problema se refere ao fato de não ser possível associar a lei de potência para todos os valores de uma série sob investigação. Mais do que isso, para uma série real deve-se considerar que “[i]n practice, few empirical phenomena obey power laws for all values of x . More often the power law applies only for values greater than some minimum x_{min} . In such cases we say that the *tail* of the distribution follows a power law.” (Clauset, Shalizi e Newman, 2009, p. 662, itálico no original). Inicialmente, este tipo de ajuste era realizado através da estimativa de uma regressão linear da equação (1) em logaritmos, obtendo a definição de um valor para x_{min} através da análise visual do histograma (em logaritmos). Um segundo problema decorre justamente do caráter subjetivo desta análise visual.

Para contornar as dificuldades e limitações de uma análise subjetiva, os autores sugerem um método para determinar um valor ótimo de x_{min} , conforme sumarizado em seguida. Da equação (1) segue-se que

$$\int_{x_{min}}^{\infty} Cx^{-\alpha}dx = 1 \quad (2)$$

e que resulta em

$$C = \frac{\alpha - 1}{x_{min}^{1-\alpha}}. \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) obtemos

$$p(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{min}} \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha}. \quad (4)$$

Seja $P(x) = Pr(X \geq x)$ a complementar da função de distribuição acumulada (a complementar é definida por 1 – a distribuição acumulada) definida por:

$$P(x) = \int_x^{\infty} p(x')dx' = \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{1-\alpha}, \quad (5)$$

é possível estabelecer um estimador de máximo verossimilhança para o parâmetro α dado por

$$\hat{\alpha} = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{min}} \right]^{-1}. \quad (6)$$

Os autores nos informam (Clauset, Shalizi e Newman, 2009, p. 666) que o erro padrão do estimador $\hat{\alpha}$ é dado por

$$\sigma = \frac{\hat{\alpha} - 1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (7)$$

mais adiante, na seção em que exploram a performance do estimador de parâmetro, os autores afirmam que “[o]ur experience suggests that $n \gtrsim 50$ is a reasonable rule of thumb for extracting reliable parameter estimates. [...] Data sets smaller than this should be treated with caution.” (Clauset, Shalizi e Newman, 2009, p. 669). Em nossas estimativas o menor valor de n foi 105, nos dando uma margem razoável para o limite inferior sugerido. Por fim, com o objetivo de definir um valor ótimo de x_{min} os autores (Clauset, Shalizi e Newman, 2009, p. 672) sugerem que seja escolhido o valor que minimiza a função

$$D = \max_{x \geq x_{min}} |S(x) - P(x)| \quad (8)$$

onde $S(x)$ é o complementar da distribuição acumulada dos valores empíricos e $P(x)$ é o complementar da distribuição estimada para o valor de x_{min} pelo estimador definido em (6). A distância D nada mais é do que a estatística de Kolmogorov-Smirnov (doravante estatística KS). Desta forma, o valor de x_{min} estimado será aquele que fornece o melhor ajuste com a distribuição de lei de potência segundo este critério de distância.

Com os mesmos procedimentos é possível obter as estimativas para outras distribuições de probabilidades com caudas pesadas. Neste trabalho nós consideramos duas das enumeradas pelos autores, a função exponencial com função de distribuição dada por

$$p(x) = \lambda e^{\lambda x_{min}} e^{-\lambda x} \quad (9)$$

e a lognormal definida por

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\ln(x_{min}) - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]^{-1} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (10)$$

Veja a tabela 1 em Clauset, Shalizi e Newman (2009, p. 664) para estes dois últimos resultados, nesta mesma tabela os autores consideram, ainda, mais duas opções de distribuição, uma lei de potência com *cutoff* e uma exponencial *stretched* que não ajustamos neste trabalho. Após a realização das estimativas e da obtenção dos melhores ajustes para as diferentes funções de distribuição é possível avaliar a qualidade de cada ajuste através de um teste com simulações *bootstrap*. Seguindo Clauset, Shalizi e Newman (2009, pp. 675-678) o teste proposto para medir a *plausibilidade* do ajuste de uma série fornece um p-valor determinado pela frequência em que o valor da estatística KS de uma série sintética é maior do que o valor da mesma estatística para a série original.

Para gerar uma série sintética o procedimento é o seguinte: Dada uma série com n observações totais e n_{tail} observações na cauda sob a qual se estimou os parâmetros x_{min} e $\hat{\alpha}$, será gerada uma série sintética com n observações definidas de maneira que, primeiro, com probabilidade dada pela frequência $\frac{n_{tail}}{n}$ um elemento gerado de uma lei de potência com os parâmetros estimados x_{min} e $\hat{\alpha}$ da série original é adicionado à série sintética; segundo, com probabilidade $1 - \frac{n_{tail}}{n}$ o elemento adicionado à série sintética é um elemento escolhido aleatoriamente da série original, mas pertencente ao ramo onde $x < x_{min}$ (Clauset, Shalizi e Newman, 2009, p. 677). Para esta série sintética é realizado o mesmo procedimento de estimativa de x_{min} e $\hat{\alpha}$, além do cálculo da estatística KS , conforme explicitado anteriormente. Gillespie (2015, p.11) define este teste, para o caso de uma lei de potência, da seguinte maneira:

H_0 : os dados são gerados de uma distribuição em lei de potência;

H_1 : os dados não são gerados de uma distribuição em lei de potência.³⁴

Quanto mais perto de 1 for o p-valor, mais plausível é a hipótese que a cauda $x \geq x_{min}$ é explicada por uma lei de potência. Quanto mais próximo de 0, menos plausível é a explicação. O

³Remetemos à referência para o original em inglês.

⁴A metodologia e as especificações são análogas para as outras distribuições.

autores sugerem o valor de $p \leq 0.10$ para considerar a explicação *implausível*. Obviamente existe alguma arbitrariedade na definição deste patamar e, como os próprios autores observam (Clauset, Shalizi, Newman, 2009, p. 678) o p-valor pode ser artificialmente maior quando n é pequeno e a distribuição não é em lei de potência. Como veremos a seguir todos os ajustes com lei de potência onde o p-valor foi maior do que 0,10 (17 dos 20), este valor foi também maior do que 0,20, o que nos garante um grau maior de confiança nos nossos resultados.

Por fim, Clauset, Shalizi e Newman (2009, pp. 679-681) propõem a comparação direta entre duas distribuições no ramo $x \geq x_{min}$, onde o valor de x_{min} é o calculado para o ajuste da lei de potência. O objetivo é obter uma medida estatisticamente válida da vantagem ou não de classificar este ramo dos dados como seguindo uma lei de potência em comparação a uma eventual alternativa. Esta comparação é realizada através do teste da razão da verossimilhança.⁵ O procedimento é detalhado no apêndice C do artigo (Clauset, Shalizi e Newman, 2009, pp. 696-698), mas pode ser sumarizado como a obtenção do logaritmo da razão da verossimilhança de dois ajustes. É importante estar atento para o fato que não estamos comparando os ajustes de lei de potência com aqueles ajustes em lognormal e exponencial que foram realizados e avaliados anteriormente. Os ajustes com distribuição lognormal e exponencial são estimados novamente para o ramo onde $x \geq x_{min}$ obtido no ajuste de lei de potência. Se o valor dessa estatística for positivo a indicação é que a distribuição de lei de potência é uma melhor explicação do que a distribuição comparada. Mas, além disso, o método informa um p-valor para esta estatística. Gillespie (2015, p. 12) explicita este teste como:

H_0 : as duas distribuições estão igualmente distantes da verdadeira distribuição;
 H_1 : uma das distribuições testadas está mais próxima da verdadeira distribuição.⁶

Um p-valor baixo para este teste indica a rejeição da hipótese nula, ou seja, favorece a atribuição da distribuição em lei de potência para a cauda da série. O pacote *powerLaw* fornece dois p-valores, um bicaudal (para as hipóteses mencionadas) e um monocaudal. Se a estatística for positiva (se o logaritmo da verossimilhança do ajuste de lei de potência for maior que o da distribuição alternativa), é evidente que podemos considerar as seguintes hipóteses para o teste:

H_0 : as duas distribuições estão igualmente distantes da verdadeira distribuição;
 H_1 : a distribuição de lei de potência está mais próxima da verdadeira distribuição.

Portanto, nos nossos testes devemos observar o p-valor monocaudal, se a estatística for positiva, com o objetivo de refutar ou não a hipótese nula da segunda especificação (a refutação indicaria a vantagem do ajuste por lei de potência); quando a estatística for negativa devemos observar o p-valor bicaudal (a não refutação da hipótese nula informa que não podemos descartar o ajuste com lei de potência, mesmo tendo um valor de verossimilhança inferior).

3 Justificativa e descrição das séries analisadas

Selecionamos dez séries de taxas de câmbio em relação ao dólar buscando comparar dados de algumas das economias mais importantes no comércio e nas finanças em plano mundial, mas

⁵Gillespie (2015: p. 12) chama o procedimento de método de Vuong.

⁶Remetemos à referência para a verificação do original em inglês.

também buscamos a representatividade de diferentes regiões, de diferentes graus de desenvolvimento, de regimes cambiais diversos e de moedas com distintos posicionamentos no Sistema Monetário Internacional (SMI). Assim, esperamos também contribuir para as discussões que indicam a impossibilidade de definir o comportamento das distintas taxas de câmbio do globo como homogêneo, quando em realidade ele é bastante dependente da institucionalidade do mercado cambial, do histórico de transações neste mercado, dos agentes participantes e, sobretudo, das características das moedas em questão. Como destacado pela literatura que se debruça sobre os estudos da “hierarquia monetária” (e.g. Carneiro: 1999; Prates: 2005; De Conti *et al.*: 2014), o SMI é totalmente assimétrico, com algumas poucas moedas que são usadas para as operações internacionais – as chamadas moedas centrais – e outras (a maioria) que não desempenham em âmbito global as funções clássicas da moeda – as moedas periféricas. De acordo com essa literatura, o posicionamento dessas distintas moedas no SMI determina o perfil de sua demanda e, em consequência, a dinâmica de suas taxas de câmbio.

Neste artigo serão analisadas as taxas de câmbio das principais moedas centrais do globo, a saber, o Euro (Zona do Euro), a Libra esterlina (Reino Unido), o Franco (Suíça) e o Yen (Japão); e de algumas moedas com um posicionamento mais periférico no SMI, quais sejam, o Won (Coreia do Sul), o Yuan (China), o Rand (África do Sul), o Real (Brasil), a Rúpia (Índia) e o Peso (México). Os dados das séries são diários e foram retirados do site do Federal Reserve.⁷ Todas as séries estão na forma “unidades monetárias por US\$1”.⁸ Dada a importância absoluta e crescente da China na economia mundial definimos o nosso recorte temporal de julho de 2005 a junho de 2019, uma vez que antes do início deste período a taxa cambial da moeda chinesa era praticamente fixa.

As séries analisadas são as de variação percentual diária da taxa de câmbio, aproximada pela diferença entre os logaritmos naturais, ou simplesmente o retorno das taxas. As figuras de 1 a 10 apresentam três gráficos para cada taxa de câmbio. O gráfico à esquerda e acima é o da evolução temporal da taxa em relação ao dólar, o à esquerda e abaixo é da evolução temporal do retorno, enquanto que o gráfico à direita é o histograma dos retornos. Neste último existem duas funções de densidade destacadas. A de cor azul é a própria densidade empírica dos dados; a de cor vermelha é a função densidade da distribuição normal que possui a mesma média e o mesmo desvio padrão dos dados empíricos. Como pode ser observado todas as distribuições empíricas são mais leptocúrticas do que a distribuição normal, mas com grande heterogeneidade.

A tabela 1 apresenta algumas estatísticas descritivas das séries. Como as séries foram retiradas da mesma base e para o mesmo período o número de dados é muito próximo. O que diferencia as séries é o número de observações iguais à zero, ou seja, quando o valor da taxa foi igual em dois dias seguidos de operação. Destacadamente a série para o Yuan apresenta o maior número dessas observações, podendo indicar maior presença de *crawling peg* nesta série. Enquanto as médias se localizam perto do valor nulo, o maior valor de apreciação (13,222%) e depreciação (10,135%) ocorre na série para o Won. A série com menor apreciação máxima é o Yuan (2,019%), esta série também apresenta a menor depreciação máxima (1,816%). Como a média é próxima a zero a medida do desvio não pode ser empregada para o cálculo do coeficiente de variação, o que torna o desvio padrão de pouco uso, ainda mais se observarmos que, como afirmado anteriormente, as

⁷O site eletrônico para as séries é <https://www.federalreserve.gov/releases/h10/hist/>.

⁸As séries para o Euro e para a Libra esterlina são originalmente apresentadas da forma inversa, mas foram transformadas para permitirem a comparação.

séries são leptocúrticas, o que distancia a comparação com a distribuição normal. Na tabela 1 identificamos duas medidas de excesso de curtose em relação à distribuição normal. A medida “Curtose” foi calculada para toda a série,⁹ enquanto que a medida “Curtose (-1)” é computada para a série sem o menor e o maior valor. Este cuidado ocorre porque a medida de curtose é muito sensível a valores extremos. Para a série do Franco, por exemplo, a medida cai de 48,01 para 4,69 com este procedimento. Mesmo com este cuidado todas as séries apresentaram excesso de curtose em relação à normal, reforçando a observação de caudas pesadas e a necessidade de um tratamento adequado desta característica. A série do Franco, também, é a que apresenta maior valor absoluto para o coeficiente de distorção (-1,60), a medida que indica a assimetria da série.

Como indicado acima, chamam bastante atenção as estatísticas relativas ao Yuan. Isso se explica pelas características do regime cambial chinês, há décadas marcado por um forte controle estatal, voltado à manutenção de uma taxa de câmbio relativamente estável e em patamar que contribua com a competitividade externa da produção manufatureira do país. Esse controle é possível em função do aparato regulatório da conta financeira chinesa e do imenso volume de reservas internacionais detido pelo país,¹⁰ que permite, quando necessário, fortes intervenções do *People's Bank of China* (PBOC) no mercado cambial.¹¹ Em agosto de 2015, esse regime foi flexibilizado, gerando, como mostra a Figura 10, uma valorização da moeda chinesa e um relativo aumento da volatilidade de sua taxa de câmbio (IMI-RUC: 2017). No entanto, apesar de uma redução na frequência de variações iguais a zero (que marcaram a fase anterior), o PBOC mantém sua prática de intervenções que impedem variações diárias extremas. A variação de 2,019%, mencionada acima, foi a maior variação cambial diária dos últimos vinte anos na China (Van Noije *et al.*: 2017). Por outro lado, como indicado, é a menor variação máxima dentre as moedas estudadas neste artigo. Além do Yuan, a outra moeda periférica que apresenta um comportamento de exceção é a Rúpia, já que o Banco Central Indiano também exerce um estrito controle sobre a taxa de câmbio, justamente para conter a potencial volatilidade excessiva da moeda.

A outra moeda cuja taxa de câmbio tem características peculiares é o Franco Suíço. Tratando-se de uma moeda central, a tendência é que suas variações não sejam aberrantes, pois trata-se de uma moeda líquida no plano internacional e os fluxos de capitais destinados ao país tendem a não ser tão voláteis. No entanto, a trajetória de sua taxa de câmbio ao longo da última década tem sido atípica e interessante de ser discutida. A eclosão da crise financeira internacional, com a falência do banco Lehman Brothers, em setembro de 2008, resultou em uma fuga generalizada para o Dólar,¹² que significou a apreciação dessa moeda em relação a praticamente todas as moedas do globo. Uma das poucas exceções foi o Franco Suíço que, pela confiabilidade que inspira aos agentes globais – associada sobretudo à importância do sistema bancário suíço –, se apreciou em relação ao Dólar. Como mostra a Figura 2, a despeito de alguns momentos de depreciação, causadas notadamente por intervenções do Banco Central Suíço, a trajetória de apreciação da moeda se sustentou no pós-2008 e foi inclusive acentuada pela crise da Zona do Euro, a partir de 2010. Nesse contexto de incertezas em relação ao Euro, o papel do Franco Suíço como “porto seguro” para os investidores

⁹A rigor a medida calculada foi o excesso de curtose, ou seja, a medida de curtose -3, uma vez que 3 é o valor da curtose em uma distribuição normal.

¹⁰A China detém as maiores reservas internacionais do globo, com um volume já há anos superior a US\$ 3 trilhões.

¹¹Essa política é parte importante da estratégia de desenvolvimento chinesa (Popov, 2015).

¹²A despeito de a crise ter se originado no mercado imobiliário *subprime* dos Estados Unidos, o cenário de incerteza levou os agentes à busca de refúgio naquele que é o considerado como o ativo mais seguro da economia global, o dólar americano.

internacionais se reforçou e os massivos fluxos de capital para o país resultaram em uma duradoura trajetória de queda de sua taxa de câmbio em relação às demais moedas do globo. Temendo, no entanto, os efeitos perniciosos de uma moeda sobrevalorizada sobre a estrutura produtiva nacional, o Banco Central Suíço, pela primeira vez em mais de três décadas, decidiu colocar um piso para a taxa de câmbio, gerando, no dia de seu anúncio (5 de setembro de 2011), uma desvalorização de 8,89% em relação ao Dólar (indicada na Tabela 1). A partir daí, as variações cambiais ficaram bastante limitadas, até que o Banco Central do país, em 15 de janeiro de 2015, suspendeu esse piso, gerando, em um só dia, uma apreciação de 13,02% de sua moeda. Assim, a dinâmica cambial do Franco Suíço é curiosamente marcada por uma preponderância quase absoluta de pequenas variações, mas por esses poucos momentos de variações aberrantes, que resultam dos momentos de mudanças importantes na política cambial.

A trajetória do Won sul-coreano também é interessante de ser destacada. Tratando-se de uma moeda periférica – e, portanto, com baixa liquidez no plano internacional –, sua taxa de câmbio apresenta uma volatilidade potencial mais elevada. Diante disso, o Banco Central Sul-Coreano tem a prática de realizar intervenções no mercado cambial no sentido de conter uma volatilidade excessiva. No entanto, em momentos de intenso *stress* nos mercados financeiros globais, a condição periférica da moeda se manifesta de forma mais clara e o Banco Central não é capaz de evitar variações excessivas. Foi o que aconteceu em 2008, diante da falência do Lehman Brothers, quando o Won se depreciou de forma bastante expressiva em relação ao Dólar (constituindo a maior variação positiva da amostra de moedas aqui estudada). No entanto, refletindo um típico movimento de *overshooting* (Dornbusch: 1976) e diante das intervenções do Banco Central, a taxa de câmbio do Won sofreu, logo na sequência, uma brusca queda, que também se constitui como a maior variação negativa da amostra. Nota-se, destarte, que as variações aberrantes do Won e do Franco Suíço têm causas muito diversas, refletindo suas condições de, respectivamente, moeda periférica e moeda central.

Moeda	N	Zeros	Média	Mínimo	Máximo	Desvio padrão	Curtose	Curtose (-1)	Distorção
Euro	3510	36	1,8E ⁻⁵	-0,04621	0,03003	0,00599	3,29	2,36	- 0,17
Franco	3510	32	-7,8E ⁻⁵	-0,13022	0,08891	0,00684	48,01	4,69	- 1,60
Libra	3510	25	9,8E ⁻⁵	-0,04435	0,08169	0,00622	13,27	5,08	0,88
Peso	3510	12	1,65E ⁻⁴	-0,0596	0,08114	0,00736	11,43	7,05	0,77
Rand	3510	20	2,14E ⁻⁴	-0,06297	0,07924	0,01063	3,47	2,52	0,22
Real	3510	15	1,38E ⁻⁴	-0,09668	0,08667	0,01027	10,70	7,99	0,06
Rúpia	3509	106	1,31E ⁻⁴	-0,03756	0,03938	0,00507	7,87	6,59	0,19
Won	3510	72	3,1E ⁻⁵	-0,13222	0,10135	0,00753	47,86	16,36	- 0,63
Yen	3510	33	- 8E ⁻⁶	-0,05216	0,03343	0,00640	5,05	3,94	- 0,35
Yuan	3506	226	- 5,3E ⁻⁵	-0,02019	0,01816	0,00164	18,46	9,37	- 0,11

Tabela 1: Estatísticas descritivas das séries

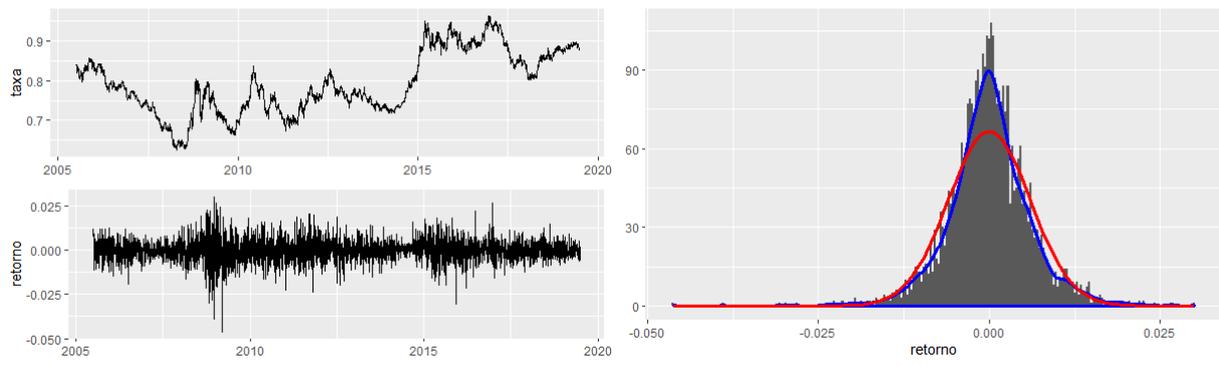


Figura 1: Euro

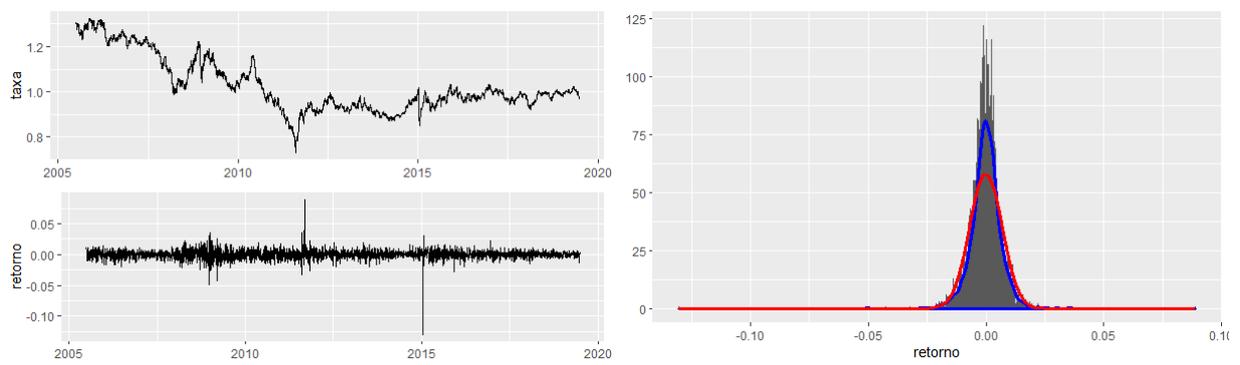


Figura 2: Franco suíço

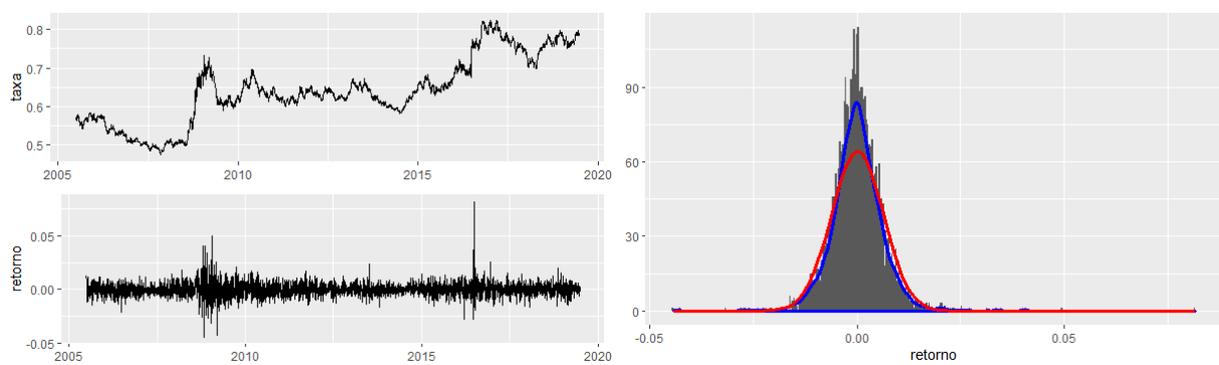


Figura 3: Libra esterlina

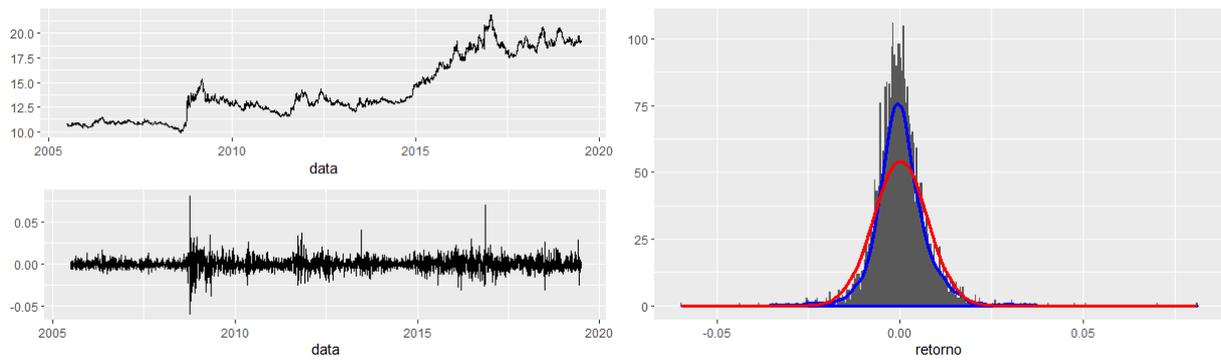


Figura 4: Peso mexicano

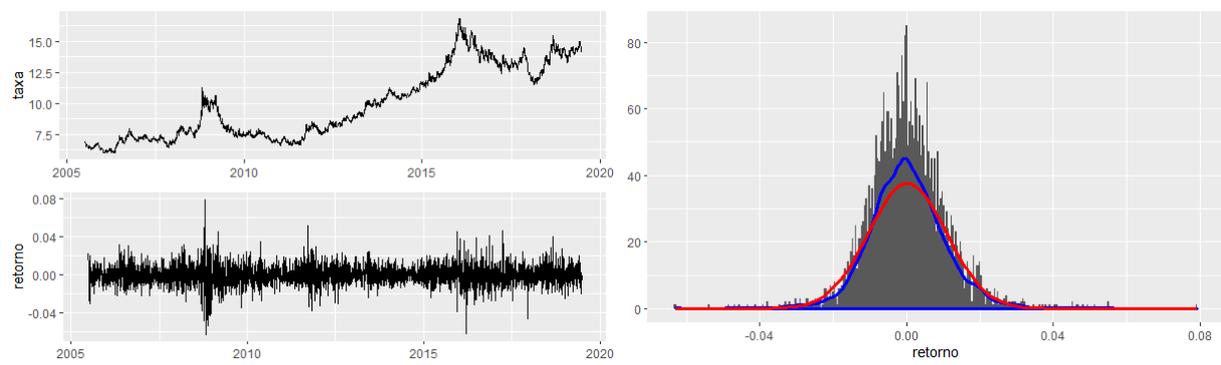


Figura 5: Rand

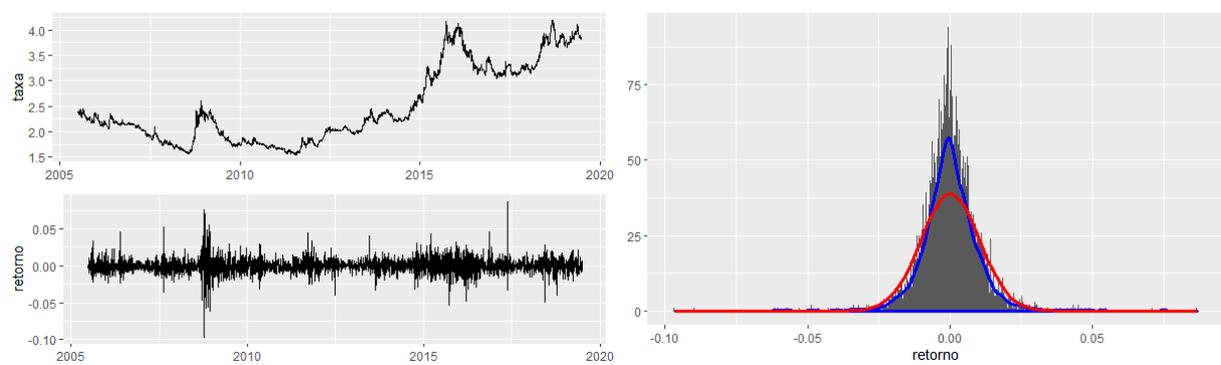


Figura 6: Real

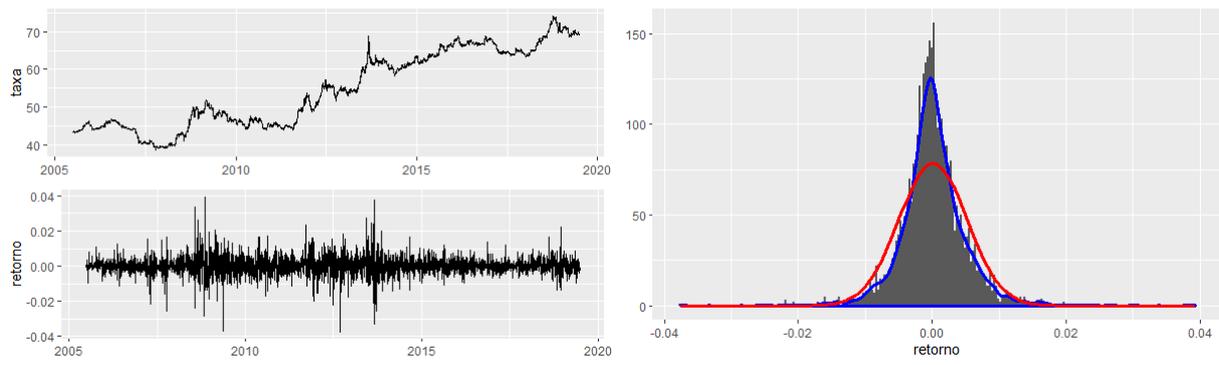


Figura 7: Rúpia

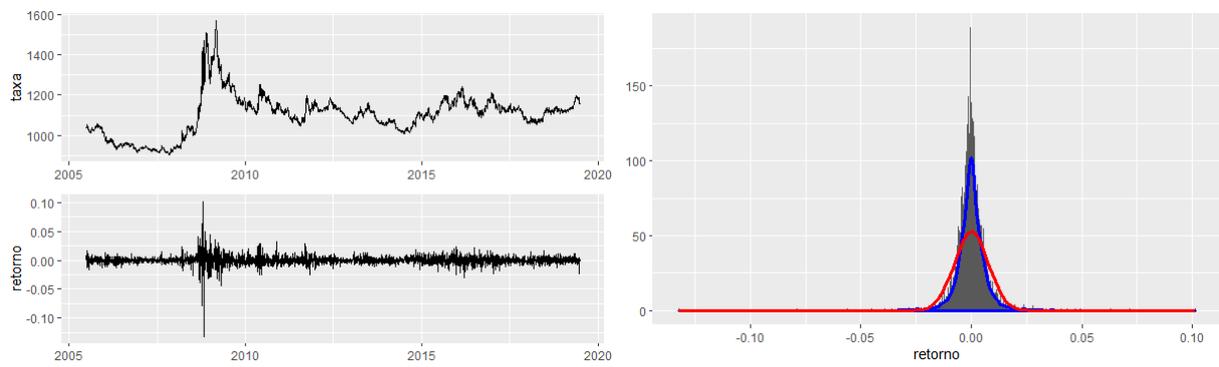


Figura 8: Won

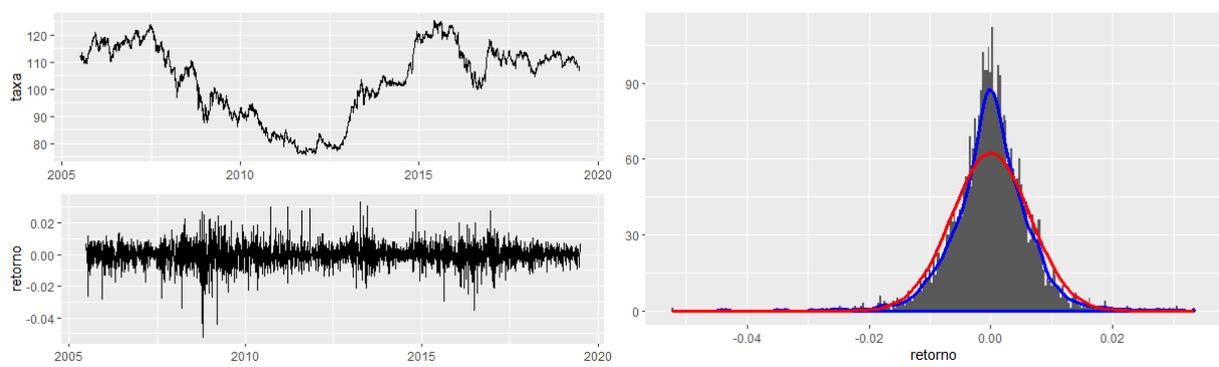


Figura 9: Yen

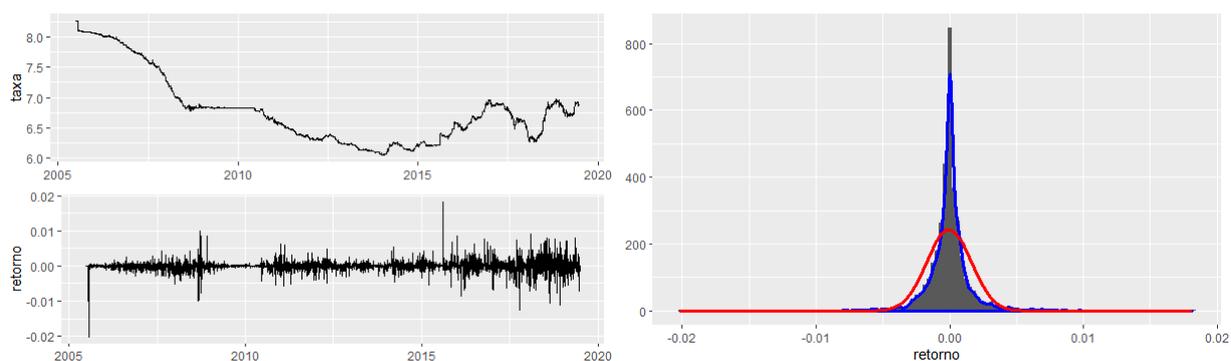


Figura 10: Yuan

4 Resultados e discussão

Realizamos os ajustes das distribuições com lei de potência, lognormal e exponencial para as duas caudas das dez séries de retorno. Os valores dos ajustes se encontram separados por tipo de ajuste nas tabelas 2, 3 e 4. Na tabela 2 observamos que apenas para as caudas positivas das séries de retornos para o Euro, a Rúpia e o Yuan os p-valores foram inferiores ao limiar 0,10 sugerido pelo método CSN. Para todos os outros ajustes o p-valor ficou acima de 0,20, o que nos fornece uma segurança adicional no teste conforme adiantado na seção 2. Das séries com ajuste estatisticamente significativo a parcela de valores extremos explicados por uma lei de potência variaram de 6,0% (Franco, cauda negativa) a 14,7% (Rand, cauda negativa), sendo a primeira o menor ajuste com 105 observações no extremo. O menor valor estimado para o expoente α foi 3,168 (Won, cauda positiva), enquanto que o maior foi 4,951 (Libra, cauda negativa). Como se sabe, quanto menor o valor do expoente α maior a probabilidade de eventos mais extremos. Para ilustrar este resultado observe a figura 11. Nesta encontramos 4 trechos de funções $p(x)$ em lei de potência (equação 4) com os mesmos valores x e x_{min} , mas variando os expoentes de 2 a 5. Note que as distribuições com menor valor do expoente “caem mais lentamente”. O mesmo ocorre para os nossos valores empíricos, nas séries com expoentes menores os valores mais distantes da média são esperados com maior probabilidade e nas séries com expoentes maiores ocorre o inverso. Isto nos permite uma medida de volatilidade das séries em seus ramos mais afastados da média. Como veremos na próxima seção, estes valores se concentram mais ou menos em torno de alguns picos a depender da série, de modo que estas estimativas podem servir, ainda, para a construção cenários para momentos de maior volatilidade.

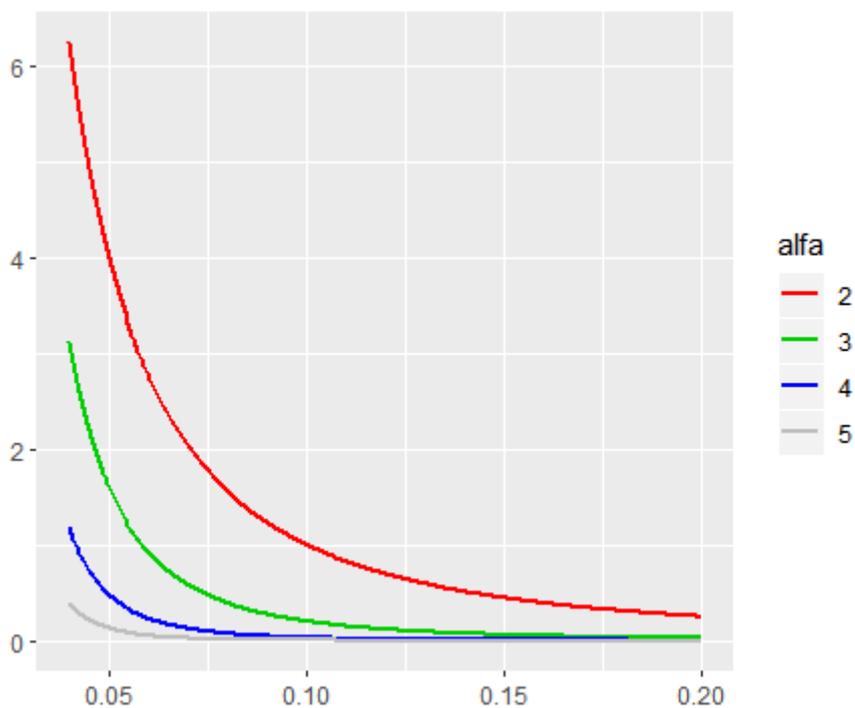


Figura 11: Exemplos de distribuições em lei de potência

Moeda	Cauda	n	n_{tail}	x_{min}	α	p-valor
Euro	Positiva	1730	150 (8,7%)	0,0109	5,019	0,068
	Negativa	1744	157 (9,0%)	-0,0101	4,495	0,987
Franco	Positiva	1741	212 (12,2%)	0,0093	4,375	0,241
	Negativa	1737	105 (6,0%)	-0,0127	4,587	0,5605
Libra	Positiva	1740	211 (12,1%)	0,0090	4,027	0,9685
	Negativa	1745	128 (7,3%)	-0,0105	4,951	0,888
Peso	Positiva	1696	216 (12,7%)	0,0109	3,899	0,5065
	Negativa	1802	154 (8,5%)	-0,0108	3,815	0,415
Rand	Positiva	1705	113 (6,6%)	0,0199	4,399	0,6365
	Negativa	1785	262 (14,7%)	-0,0134	4,026	0,275
Real	Positiva	1712	150 (8,8%)	0,0165	3,791	0,658
	Negativa	1783	166 (9,3%)	-0,0150	3,851	0,256
Rúpia	Positiva	1673	304 (18,2%)	0,0063	3,553	0,087
	Negativa	1730	161 (9,3%)	-0,0077	3,837	0,2655
Won	Positiva	1679	237 (14,1%)	0,0086	3,168	0,561
	Negativa	1759	214 (12,2%)	-0,0086	3,286	0,5335
Yen	Positiva	1755	162 (9,2%)	0,0100	4,117	0,3895
	Negativa	1722	192 (11,1%)	-0,0097	3,957	0,698
Yuan	Positiva	1553	330 (21,2%)	0,0014	2,669	0
	Negativa	1727	208 (12,0%)	-0,0021	3,249	0,406

Tabela 2: Estatísticas dos ajustes de lei de potência

Os resultados dos ajustes com distribuições lognormais estão apresentados na tabela 3. Das

duas caudas das dez séries de retorno apenas os ajustes para as caudas positivas de Euro e Yen tiveram p-valor inferior a 0.10 (5 tiveram p-valor no intervalo]10, 20]). Em comparação com os ajustes de lei de potência, temos que uma maior parcela da série é explicada pela distribuição lognormal. Das séries com p-valor maior do que 0,10 o tamanho dos extremos explicados por uma distribuição lognormal variou de 28,0% (Yuan, cauda positiva) a 68,6% (Rand, cauda negativa). A distribuição lognormal possui dois parâmetros, a média μ e o desvio padrão σ da distribuição normal associada. Quando maior o valor de σ maior a volatilidade da série e maior a probabilidade de valores mais distantes da média. Na figura 12 temos quatro trechos de funções $p(x)$ lognormais (equação 10) com mesmo valor de x_{min} , $\mu = -5$ e σ variando de 0,5 até 2. Das séries com ajustes estatisticamente significativos temos que o menor desvio padrão (0,620) foi estimado para a cauda negativa da série Rand, enquanto que o maior valor (0,861) foi estimado para a cauda positiva da série Won.

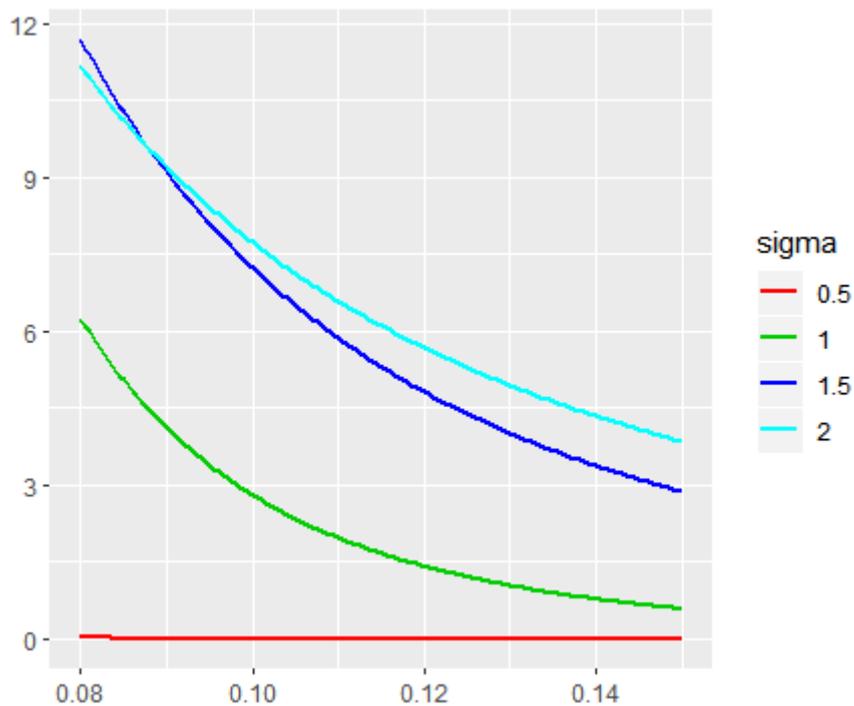


Figura 12: Exemplos de distribuições lognormais

Moeda	Cauda	n	n_{tail}	x_{min}	μ	σ	p-valor
Euro	Positiva	1730	971 (56,1%)	0,0027	-5,305	0,635	0,0235
	Negativa	1744	818 (46,9%)	-0,0034	-5,292	0,622	0,755
Franco	Positiva	1741	836 (48,0%)	0,0035	-5,261	0,622	0,148
	Negativa	1737	813 (46,8%)	-0,0036	-5,242	0,654	0,943
Libra	Positiva	1740	1002 (57,6%)	0,0028	-5,343	0,654	0,198
	Negativa	1745	958 (54,9%)	-0,0029	-5,364	0,623	0,727
Peso	Positiva	1696	1037 (61,1%)	0,0027	-5,259	0,737	0,269
	Negativa	1802	580 (32,2%)	-0,0053	-5,741	0,822	0,969
Rand	Positiva	1705	932 (54,7%)	0,0057	-4,736	0,633	0,212
	Negativa	1785	1225 (68,6%)	-0,0036	-4,858	0,620	0,19
Real	Positiva	1712	1091 (63,7%)	0,0035	-4,941	0,713	0,264
	Negativa	1783	1162 (65,2%)	-0,0031	-5,042	0,721	0,464
Rúpia	Positiva	1673	784 (46,9%)	0,0028	-5,531	0,696	0,1045
	Negativa	1730	927 (53,6%)	-0,0020	-5,724	0,740	0,8715
Won	Positiva	1679	975 (58,1%)	0,0025	-5,574	0,861	0,1195
	Negativa	1759	541 (30,8%)	-0,0049	-6,775	1,148	0,715
Yen	Positiva	1755	1072 (61,1%)	0,0025	-5,330	0,644	0,0155
	Negativa	1722	937 (54,4%)	-0,0029	-5,279	0,662	0,498
Yuan	Positiva	1553	435 (28,0%)	0,0011	-6,752	0,853	0,926
	Negativa	1727	972 (56,3%)	-0,0005	-6,972	0,857	0,1025

Tabela 3: Estatísticas dos ajustes com lognormal

Por fim, a tabela 4 apresenta os valores dos ajustes com distribuição exponencial. Podemos verificar que quase a metade dos ajustes (9 de 20) não são estatisticamente significativos (outros 6 se localizaram no intervalo]10, 20[que estamos considerando como uma margem de segurança). Dos ajustes com p-valor maior do que 0,10 temos uma grande dispersão de porcentagens das caudas explicadas pela distribuição. A menor porcentagem (6,4%) ocorre para a cauda positiva do Yuan, enquanto que a maior porcentagem (99,9%) ocorre na cauda negativa do Yen. A distribuição exponencial possui um único parâmetro, o valor de λ . Como podemos observar nos exemplos da figura 13, quatro trechos de funções $p(x)$ conforme a equação 9 e com mesmo valor x_{min} e λ variando de 300 a 600, quanto maior o valor do parâmetro menos provável serão os valores mais extremos. Nos ajustes estatisticamente válidos o valor estimado deste parâmetro ficou entre 140,552 (Rand, cauda positiva) e 882,353 (Yuan, cauda negativa).

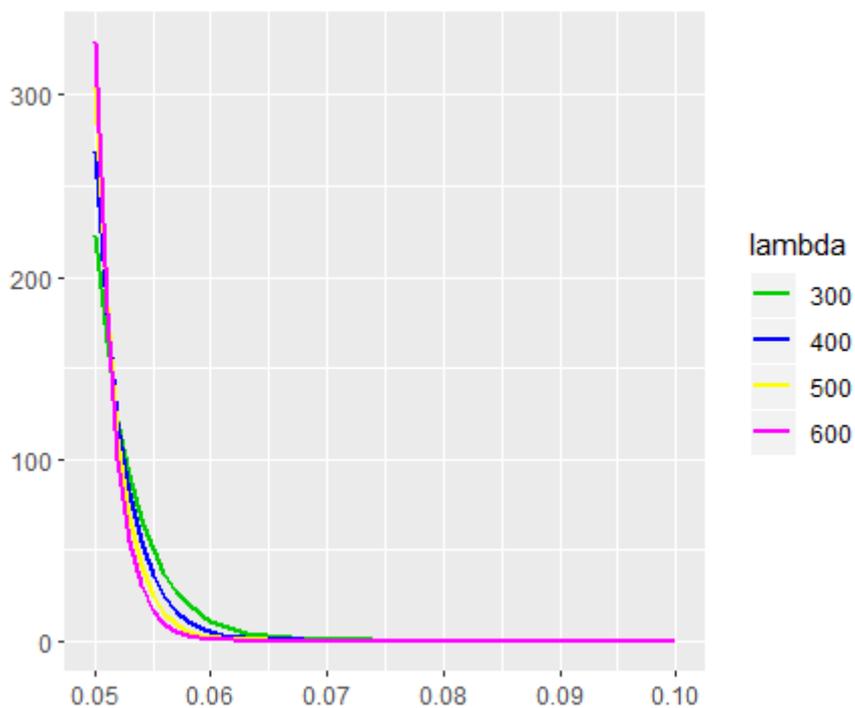


Figura 13: Exemplos de distribuições exponenciais

Moeda	Cauda	n	n_{tail}	x_{min}	λ	p-valor
Euro	Positiva	1730	756 (43,7%)	0,0039	251,149	0,147
	Negativa	1744	1093 (62,7%)	-0,0023	251,393	0,946
Franco	Positiva	1741	1215 (69,8%)	0,0020	244,069	0,483
	Negativa	1737	1505 (86,6%)	-0,0009	219,748	0,3535
Libra	Positiva	1740	1219 (70,1%)	0,0019	234,888	0,004
	Negativa	1745	870 (49,9%)	-0,0034	269,673	0,815
Peso	Positiva	1696	1622 (95,6%)	0,0004	188,811	0,509
	Negativa	1802	1532 (85,0%)	-0,0011	224,752	0,001
Rand	Positiva	1705	968 (56,8%)	0,0055	140,552	0,1705
	Negativa	1785	1049 (58,8%)	-0,0050	161,029	0,019
Real	Positiva	1712	1683 (98,3%)	0,0002	138,556	0,0035
	Negativa	1783	1483 (83,2%)	-0,0014	151,832	0,0025
Rúpia	Positiva	1673	1652 (98,7%)	0,0002	275,689	0,58
	Negativa	1730	1729 (99,9%)	-0,0001	311,385	0,073
Won	Positiva	1679	1675 (99,8%)	0,0000	211,492	0
	Negativa	1759	1754 (99,7%)	0,0000	225,719	0
Yen	Positiva	1755	1148 (65,4%)	0,0022	240,667	0
	Negativa	1722	1721 (99,9%)	-0,0001	219,046	0,314
Yuan	Positiva	1553	99 (6,4%)	0,0032	498,136	0,5415
	Negativa	1727	1081 (62,6%)	-0,0004	882,353	0,2705

Tabela 4: Estatísticas dos ajustes com exponencial

Após os ajustes nós precisamos comparar as distribuições. Como estamos dando ênfase para o

ajuste com leis de potência vamos comparar os ajustes considerados estatisticamente válidos para este tipo de distribuição com novos ajustes com lognormal e exponencial para os mesmos conjuntos de valores extremos como definido ao final na seção 2. Os resultados estão sumarizados na tabela 5. Como visto, se a estatística do teste for positiva devemos observar o valor do teste monocaudal, vamos refutar a hipótese nula caso o p-valor seja menor do que 0,10. Neste caso a distribuição de lei de potência configura um ajuste melhor do que o alternativo. Quando o valor da estatística for negativo devemos observar o teste bicaudal, se o p-valor for maior do que 0,10 não refutamos a hipótese nula de que os dois ajustes são estatisticamente indistinguíveis. Como podemos observar na tabela 5 não podemos afirmar que os ajustes com lei de potência e lognormal são estatisticamente distinguíveis para estes trechos. Para a comparação de lei de potência e exponencial temos que a lei de potência é um melhor ajuste para: Euro (cauda negativa), Franco (ambas as caudas), Libra (ambas as caudas), Peso (cauda positiva), Real (ambas as caudas), Rúpia (cauda negativa), Won (ambas as caudas), Yen (cauda negativa) e Yuan (cauda negativa).

Moeda	Cauda	Lei de potência e Lognormal			Lei de potência e Exponencial		
		estatística do teste	p-valor monocaudal	p-valor bicaudal	estatística do teste	p-valor monocaudal	p-valor bicaudal
Euro	Negativa	-0,147	0,559	0,883	1,282	0,100	0,200
Franco	Positiva	0,066	0,474	0,947	1,293	0,098	0,196
	Negativa	0,062	0,475	0,951	1,636	0,051	0,102
Libra	Positiva	0,083	0,467	0,934	2,050	0,020	0,040
	Negativa	0,071	0,472	0,944	2,172	0,015	0,030
Peso	Positiva	0,061	0,476	0,952	2,166	0,015	0,030
	Negativa	-0,573	0,717	0,566	0,902	0,184	0,367
Rand	Positiva	-0,352	0,638	0,725	0,722	0,235	0,470
	Negativa	-0,723	0,765	0,470	1,217	0,112	0,224
Real	Positiva	-0,117	0,547	0,907	1,949	0,026	0,051
	Negativa	0,067	0,473	0,946	2,274	0,011	0,023
Rúpia	Negativa	-0,237	0,594	0,813	1,722	0,043	0,085
Won	Positiva	-0,600	0,726	0,549	1,842	0,033	0,066
	Negativa	-0,179	0,571	0,858	1,739	0,041	0,082
Yen	Positiva	-0,691	0,755	0,490	0,562	0,287	0,574
	Negativa	-0,371	0,645	0,710	1,461	0,072	0,144
Yuan	Negativa	-0,719	0,764	0,472	1,444	0,074	0,149

Tabela 5: Estatísticas da comparação entre distribuições

Deste conjunto de informações podemos resumir que os ajustes com lei de potência obtiveram níveis mais seguros nos testes de plausibilidade que os demais ajustes. Além disso, para os intervalos explicados pela lei de potência estatisticamente significativos existe uma recorrente vantagem em relação ao ajuste exponencial, mas o mesmo nunca ocorre com o ajuste lognormal. Em uma análise conservadora podemos afirmar que os ajustes de lei de potência podem ser aceitos (quando estatisticamente válidos) com um grau moderado de confiança, tendo como principal alternativa os ajustes lognormais.

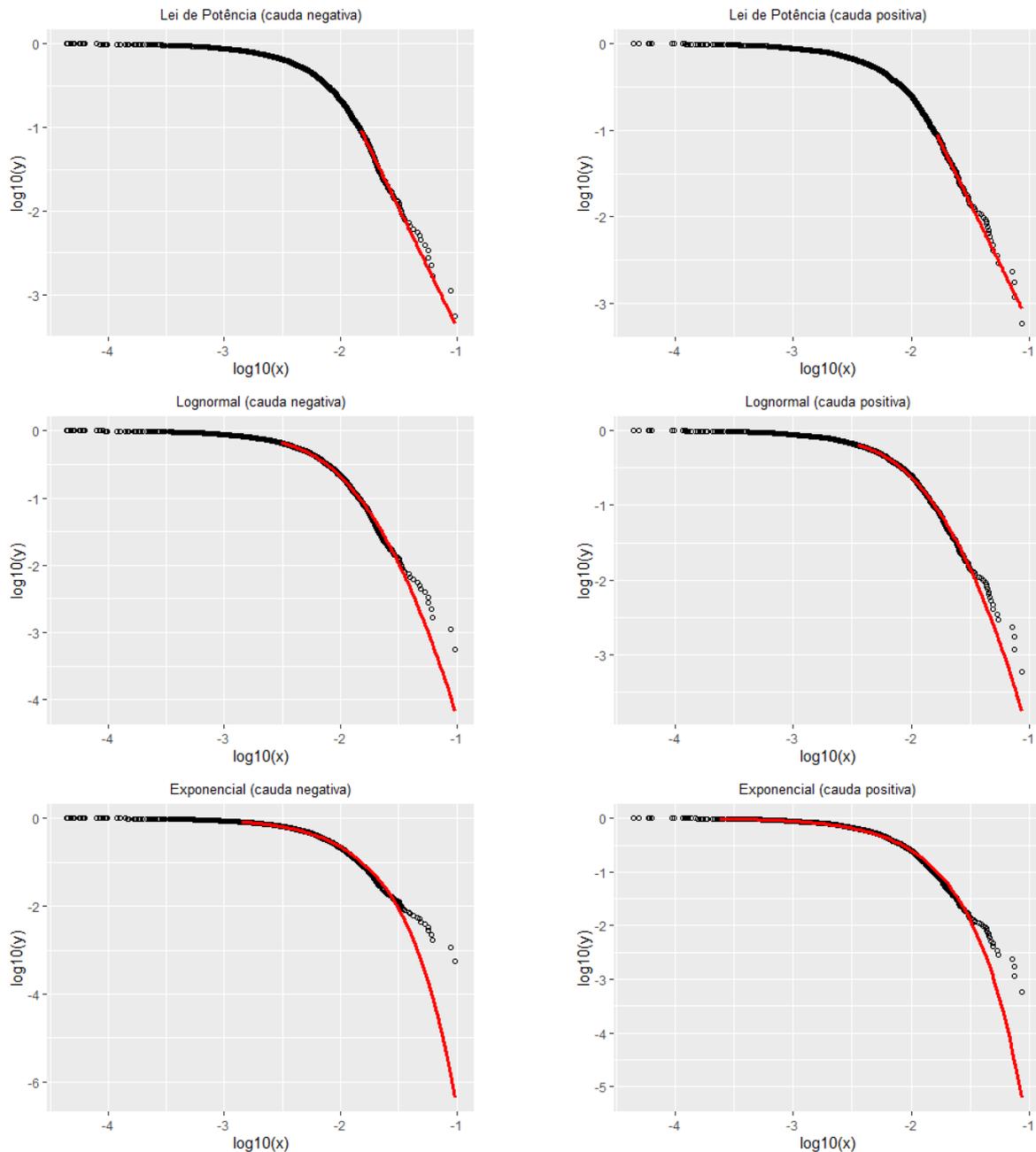


Figura 14: Complementar da Função Acumulada para o Real (caudas) e ajustes

Na figura 14 observamos a complementar da função de probabilidades acumuladas empíricas para as caudas das séries para o Real. O eixo vertical apresenta, para cada ponto, $1 - F$, onde F é a frequência acumulada até o ponto em escala logarítmica, enquanto o eixo horizontal apresenta o valor da observação (também em logaritmo). Nos gráficos os valores empíricos são apresentados em círculos abertos. A curva em vermelho é a função para cada uma das distribuições. Como era de se esperar o ajuste de lei de potência é uma reta. Nas investigações pioneiras esta reta era ajustada por regressão linear, escolhendo-se (de forma subjetiva) um valor para x_{min} . O que, como vimos, é dispensável com o método CSN, por exemplo. Entretanto, a análise visual não pode ser considerada sem valor. É evidente pela figura 14 que os valores mais extremos são mais satisfato-

riamente explicados pelo ajuste de lei de potência.

Na figura 15 temos os mesmos tipos de gráfico para as séries das caudas do Franco. Cabe lembrar que esta foi a única moeda com p-valores maiores do que 0,10 para todos os ajustes. A análise visual, neste caso, nos permite algumas observações adicionais. Para a cauda positiva existe um valor *outlier* óbvio. O ajuste em lei de potência é o que menos subestima a sua probabilidade, mas mesmo assim isso ocorre em uma ordem de 10^{-1} (observar a distância vertical entre o ponto e o final da reta). Para a cauda negativa os ajustes parecem ser menos precisos nos valores mais extremos. A existência de valores *outliers* nas séries para o Franco já apresentava algum indício pela grande diferença observada entre os valores calculados da curtose de da curtose(-1) além das observações de serem resultados de uma tentativa de mudança na política cambial, como apresentado na seção 3.

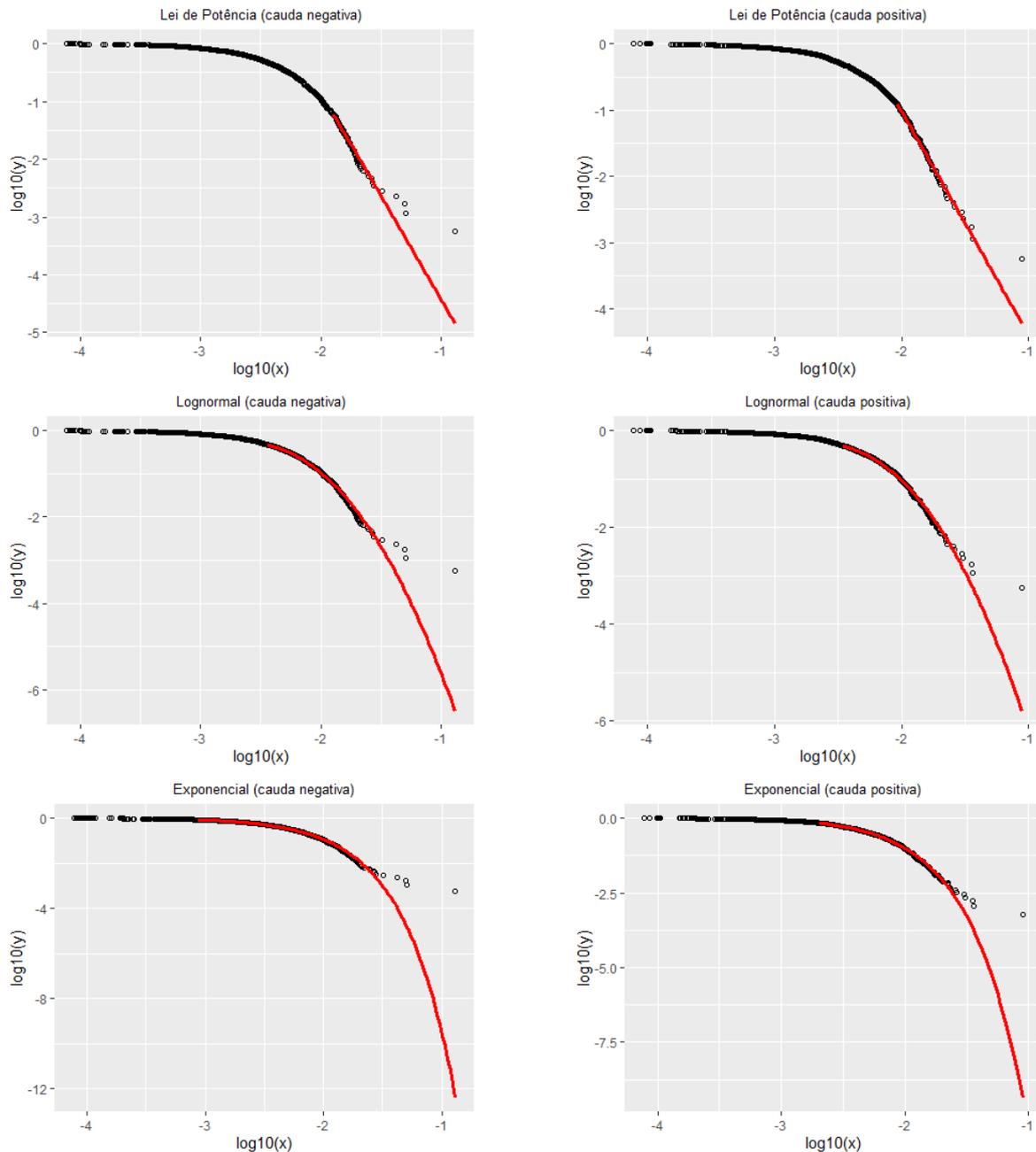


Figura 15: Complementar da Função Acumulada para o Franco (caudas) e ajustes

5 Desigualdade da ocorrência de valores extremos nas séries de retorno

Nesta seção vamos sugerir um método para observar a desigualdade da ocorrência de valores extremos nas séries de retorno. Nós vamos considerar como valores extremos aqueles que podem ser explicados por uma lei de potência, seja na cauda positiva como na negativa. Desta forma, vamos trabalhar apenas com as séries que apresentaram p-valor significativo para o ajuste de lei de potência nas duas caudas (Franco, Libra, Peso, Rand, Real, Won e Yen).

Para observarmos a frequência de ocorrências nós computamos, para cada data das séries, o número de observações com valores extremos (negativos ou positivos) nos últimos 100 dias (inclusive a data). Com esta série reconstruída podemos observar a evolução desta frequência móvel para as 7 séries na figura 16. Não apenas as séries apresentam número de picos variável, como também as frequências máximas variam consideravelmente de série a série. Não obstante, é fácil observar que, para todas as séries, o maior pico de frequências ocorreu durante a crise financeira de 2008-9. A maioria das séries apresenta, também, um pico mais persistente após 2015.

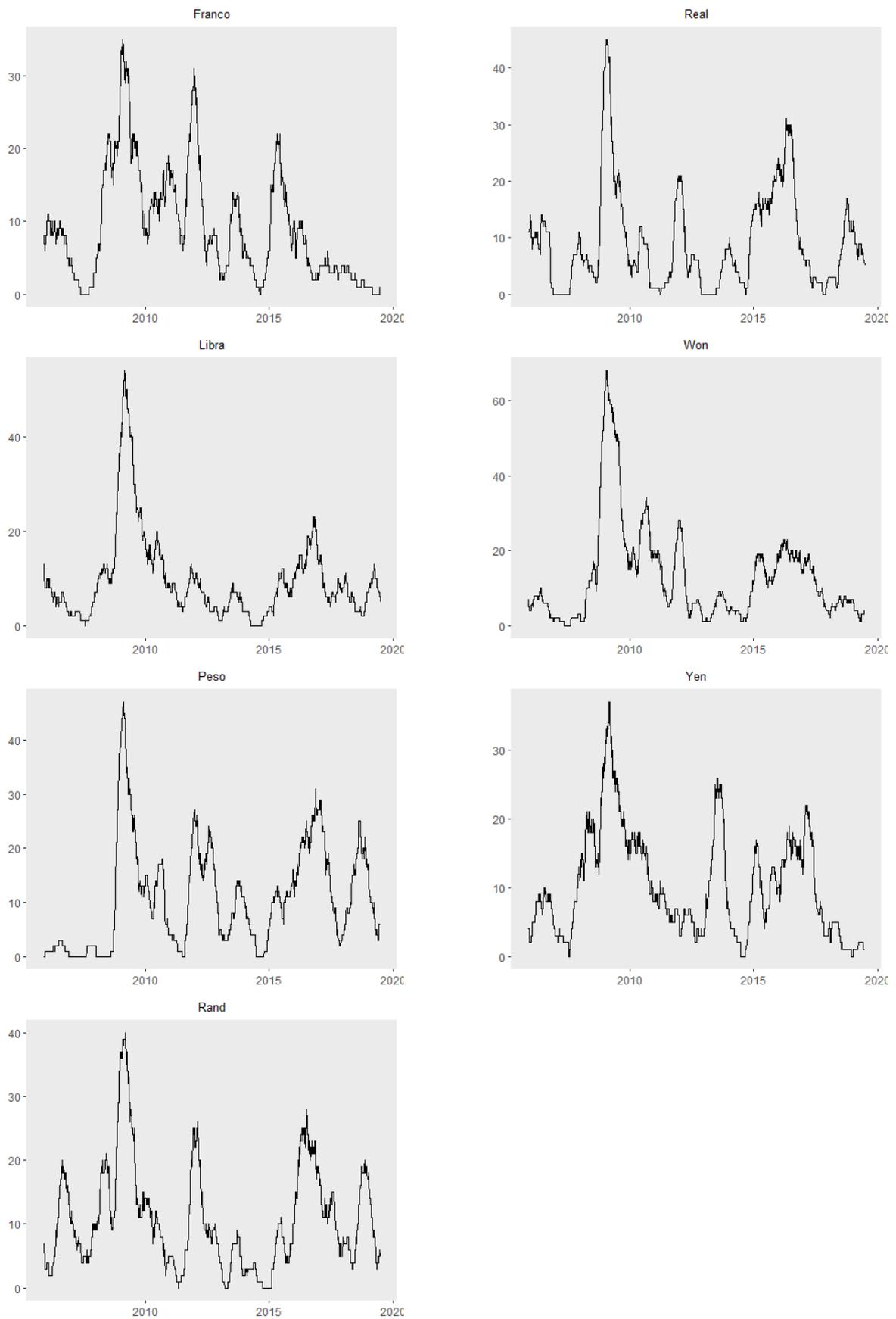


Figura 16: Frequência móvel de 100 dias para valores extremos nas séries de retorno

6 Considerações finais

Nossa principal motivação neste artigo era testar a presença de lei de potência em séries de retorno para taxas de câmbio seguindo uma metodologia que não é sujeita a análise subjetiva dos ajustes e é de fácil e acessível aplicação. Conforme evidenciado na nossa principal referência (Clauset, Shalizi e Newman, 2009), a presença de lei de potência ocorre geralmente apenas para extremos acima de um valor mínimo em séries empíricas. Ao empregar o método CSN para ajustar e testar a qualidade dos ajustes de distribuições na forma de lei de potência, lognormal e exponencial para as caudas das séries de 10 taxas de câmbio em relação ao dólar, 20 caudas ao total, verificamos que em nada menos do que 17 havia um ramo que pode ser explicado por uma lei de potência. Na comparação do ajuste de lei de potência com as outras distribuições, a lei de potência nunca pode ser descartada nestas 17 séries, enquanto a alternativa em exponencial é geralmente descartada. Desta forma, sendo conservadores com relação aos resultados observados, classificamos a presença de lei de potência nestas séries com um grau de confiança moderado. Nossa sugestão é que esta característica deve ser considerada como um fato estilizado apreciado em qualquer estudo destas séries.

7 Referências bibliográficas

Carneiro, R.M (1999), Globalização Financeira e Inserção Periférica, *Economia e Sociedade*, no. 13, pp. 58-92.

Clauset, A.; Shalizi, C.R.; Newman, M.E.J. (2009), Power-Law Distributions in Empirical Data, *SIAM Review*, vol. 51, no. 4, pp.661-703.

De Conti, B.M.; Prates, D.M.; Plihon, D. (2014), A hierarquia monetária e suas implicações para as taxas de câmbio e de juros e a política econômica dos países periféricos, *Economia e Sociedade*, vol. 23, no. 2, pp. 341-372

Dornbusch, R. (1976), Expectations and Exchange Rate Dynamics, *Journal of Political Economy*, vol. 84, pp. 1161-76.

Fama, E.F. (1963), Mandelbrot and the Stable Paterian Hypothesis, *The Journal of Business*, vol. 36, no. 4, pp. 420-429.

Gabaix, X. (2008), Power Laws in Economics and Finance, *NBER Working Papers Series*, no. 14299. Disponível em <https://www.nber.org/papers/w14299.pdf>.

Gillespie, C.S. (2015), Fitting Heavy Tailed Distributions: The PowerLaw Package, *Journal of Statistical Software*, vol. 64, no. 2, pp. 1-16.

Gillespie, C.S. (2019), The PowerLaw package: Examples (Last update: January 10, 2019), *Mimeo*. disponível em: https://cran.r-project.org/web/packages/powerlaw/vignettes/b_powerlaw_examples.pdf.

IMI-RUC (International Monetary Institute - Renmin University of China) (2017), RMB Internationalization Report 2017, *Research Report* no. 1702.

Mandelbrot, B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *The Journal of Business*, vol. 36, no. 4, pp. 394-419.

Mantegna, R.N.; Stanley, H.E. (1994), Stochastic Process with Ultraslow Convergence to a Gaussian: The Truncated Lévy Flight, *Physical Review Letters*, vol. 73, no. 22, pp. 2946-2949.

Mantegna, R.N.; Stanley, H.E. (2000), *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge: Cambridge University Press.

Popov, V. (2015), *Mixed Fortunes: an history of China, Russia, and the West*. Oxford: Oxford University Press.

Prates, D. M. (2005), As Assimetrias do Sistema Monetário e Financeiro Internacional, *Revista de Economia Contemporânea*, vol. 9, no. 2, pp. 263-288.

Van Noije, P.; De Conti, B.; Zucker, M. (2017), China: capital flight or internalization of renminbi? 21st FMM Conference: The crisis of globalization, Berlin.

Wei, H.L.; Billings, S.A. (2009), Power-law behaviour evaluation from foreign exchange market data using a wavelet transform method, *Physics Letters A*, vol. 373, pp. 3324-3329.